EXERCICE N°1 : 25' 5 points

Un solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation :

$y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{1-x^4}}$, $x \in [0\ ,\ \sqrt{2}/2]$ autour de l'axe (Ox). Le but est de calculer le volume de ce solide.

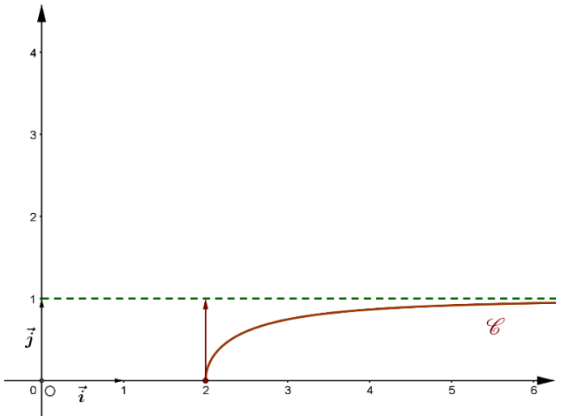
1) Soit F la fonction définie sur $[0\ ,\ \pi/2[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\sin x}} \frac{t}{\sqrt{1-t^4}}\,dt$.

a) Montrer que F est continue sur $[0\ ,\ \pi/2[$. **b)** Montrer que F est dérivable sur $]0\ ,\ \pi/2[$ et calculer F'.

2) Exprimer F(x) en fonction de x, pour tout $x \in [0\ ,\ \pi/2[$. Conclure.

EXERCICE N°2 : 35' 6 points

Soit f la fonction définie sur $[2,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}$. On a représenté ci-contre, la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



1) a) Par une lecture graphique, montrer que f est une bijection de $[2,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) On désigne par f^{-1} la fonction réciproque de f. Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1} dans le même repère.

c) Montrer que pour tout $x \in J$, $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) Soit g la fonction définie sur $]0,\pi]$ par $g(x) = \dfrac{2}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0,\pi]$ sur $[2,+\infty[$.

b) Calculer $g^{-1}(2)$ et $g^{-1}(4)$ où g^{-1} est la fonction réciproque de g.

3) a) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]2,+\infty[$ et expliciter $(g^{-1})'(x)$.

b) Vérifier que pour tout $x \in]2,+\infty[$: $f(x) = (g^{-1})'(x) + \dfrac{1}{f(x)}$.

c) Montrer alors que pour tout $x \in]2,+\infty[$: $\displaystyle\int_x^4 f(t)dt = \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3} - g^{-1}(x) - \sqrt{x^2-4}$.

4) Soit $\lambda \in]2\ ,\ 4[$. On désigne par $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie D(λ) du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations : $x = \lambda$ et $x = 4$.

a) Hachurer D(λ) et prouver que : $\lim\limits_{\lambda \to 2^+} \mathcal{A}(\lambda) = 2\sqrt{3} - \dfrac{2\pi}{3}$. Interpréter graphiquement cette limite.

b) Interpréter graphiquement l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ puis montrer que $I = \dfrac{2\pi}{3}$.